习题课 不定积分的计算方法

1. 求不定积分的基本方法

2. 几种特殊类型的积分

内容与要求

1、理解原函数、不定积分的概念及性质

2、熟悉不定积分的基本公式 (包括补充公式)

3、掌握不定积分的两类换元法

4、掌握分部积分法

5、会综合运用各种积分方法计算积分

6 、掌握三类特殊类型的函数的积分

一、 求不定积分的基本方法

1. 直接积分法

通过简单变形, 利用基本积分公式和运算法则求不定积分的方法 .

2. 换元积分法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;\underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}}\; \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(代换: $x=\varphi(t)$)

(注意常见的换元积分类型)

3. 分部积分法 $\int u v' \mathrm{d}x = uv - \int u' v \mathrm{d}x$

使用原则：1) 由 v' 易求出 v;

2) $\int u' v \mathrm{d}x$ 比 $\int u v' \mathrm{d}x$ 好求.

一般经验：按 “反, 对, 幂, 指, 三” 的顺序,

排前者取为 u, 排后者取为 v'.

基本形式

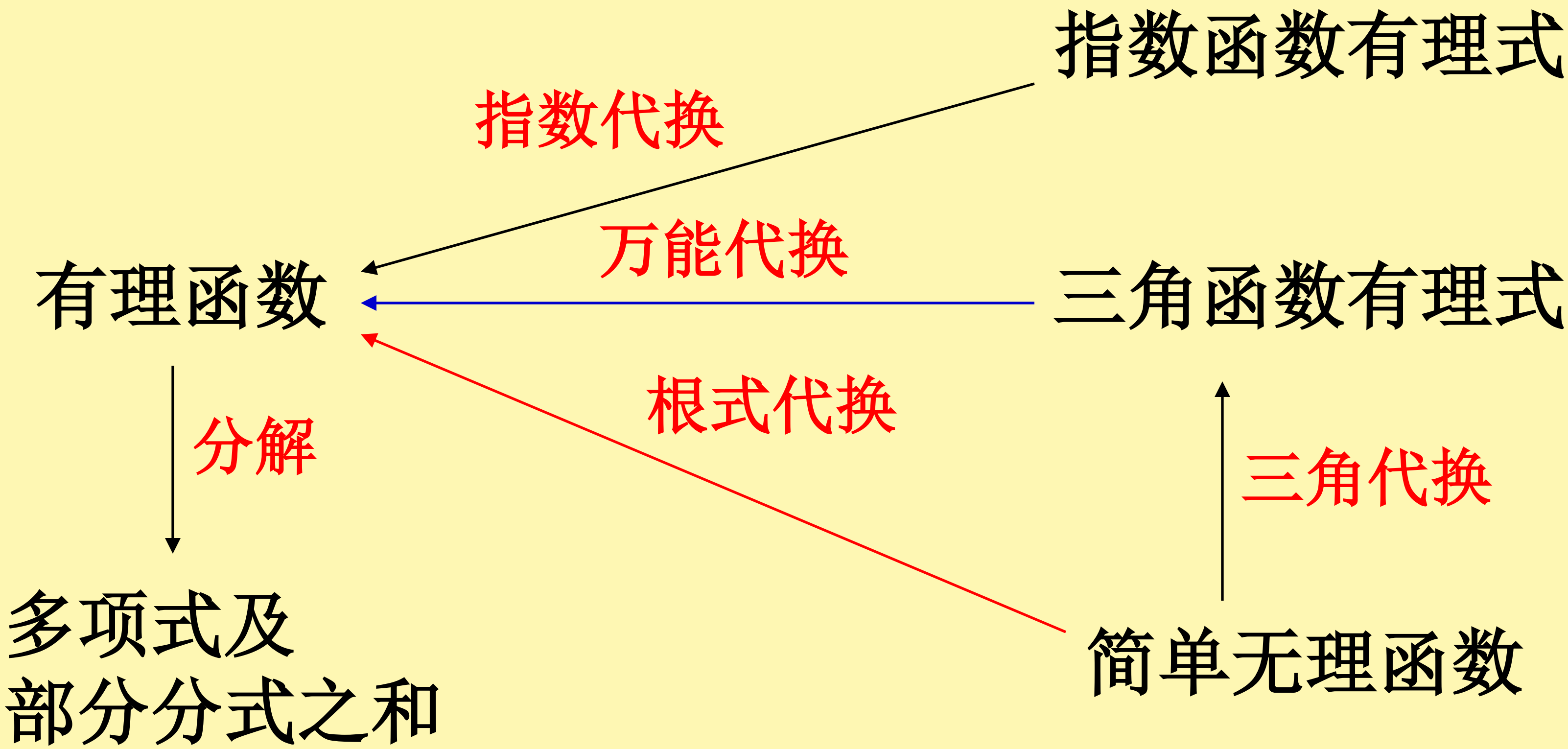
$$(i)\int x^n e^{ax} dx, \int P_n(x)\sin ax dx, \int P_n(x)\cos ax dx$$

$$(ii)\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int P_n(x)\arctan dx$$

$$(iii)\int e^{ax}\cos bx x dx, \int e^{ax}\sin bx dx.$$

二、几种特殊类型的积分

1. 一般积分方法



2. 需要注意的问题

(1) 一般方法不一定是最简便的方法， 要注意综合使用各种基本积分法, 简便计算.

(2) 初等函数的原函数不一定是初等函数, 因此不一定都能积出.

例如, $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

$\int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$, $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \ (0<k<1)$, ……

3. 对一些常用的凑微分形式要熟悉.

$$(1)、\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$$

$$(2)、\int x^{n-1}f(ax^n+b)dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$$

$$(3)、\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$$

$$(4)、\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx=-\int f(\frac{1}{x})d\frac{1}{x}$$

$$(5)、\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x,$$

$$\int f(a\ln x+b)\frac{1}{x}dx=\frac{1}{a}\int f(a\ln x+b)d(a\ln x+b)$$

(6)、$\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x$

$$\int f(ae^x + b)e^x dx = \frac{1}{a}\int f(ae^x + b)d(ae^x + b)$$

(7)、$\int f(\sin x)\cdot \cos x dx = \int f(\sin x)d\sin x$

$$\int f(\cos x)\cdot \sin x dx = -\int f(\cos x)d\cos x$$

$$\int f(\tan x)\cdot \sec^2 x dx = \int f(\tan x)d\tan x$$

(8)、$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d\arctan x$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d\arctan x$$

4. 补充公式要熟记

(1) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

(2) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

(3) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(4) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(5) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

(6) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

5. 常用的代换:

(1) $t=\sqrt[n]{\quad}$.根式整体代换

(2) 三角代换

(i) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t;\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(ii) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t;\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(iii) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec t.$

$x>a$时, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ $x<-a$时，令$x=-u$

(3) 倒代换 $x=\frac{1}{t}$

二、例题选讲

例1、选择与填空

1. $\int f(x)dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$，则 $f'(x) = \underline{-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}$

解 $F(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = (x+\sqrt{1+x^2})'' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

2. 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则它的一个原函数为 (B)

$(A)\quad x+\sin x$ $\qquad(B)\quad x-\sin x$

$(C)\quad x+\cos x$ $\qquad(D)\quad x-\cos x$

解 $\because f'(x) = \sin x,\quad f(x) = -\cos x + C_1$

$F(x) = -\sin x + C_1 x + C_2$ 可令 $C_1 = 1,\ C_2 = 0$ 选 B

例2 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x + 4^x} \mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \frac{2^x 3^x}{3^{2x} + 2^{2x}} \mathrm{d}x = \int \frac{(\frac{2}{3})^x}{1 + (\frac{2}{3})^{2x}} \mathrm{d}x$

令 $u = (\frac{2}{3})^x$, 则 $x = \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} \ln u,\quad dx = \frac{1}{\ln 2 - \ln 3} \cdot \frac{1}{u} du,$

上式 $= \int \frac{u}{1+u^2} \frac{1}{\ln 2 - \ln 3} \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{\ln 2 - \ln 3} \int \frac{1}{1+u^2} du,$

$$= \frac{\arctan u}{\ln 2 - \ln 3} + C = \frac{\arctan (\frac{2}{3})^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$$

法二: 原式 $= \int \frac{(\frac{2}{3})^x}{1 + (\frac{2}{3})^{2x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} \int \frac{\mathrm{d}(\frac{2}{3})^x}{1 + (\frac{2}{3})^{2x}}$

$\mathrm{d}a^x = a^x \ln a \, \mathrm{d}x$

例3 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$. 指数代换

解 令 $t=e^{\frac{x}{6}}$, 则 $x=6\ln t$, $\mathrm{d}x=\frac{6}{t}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3+t^2+t)t}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)t}$$

$$=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{t+1}-\frac{3t+3}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6\ln|t|-3\ln|t+1|-\frac{3}{2}\ln(t^2+1)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(e^{\frac{x}{6}}+1)-\frac{3}{2}\ln(e^{\frac{x}{3}}+1)-3\arctan e^{\frac{x}{6}}+C$$

例4　求$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$　　　$P186-ex4.3.1(15)$

解: 原式$=\int \frac{(x+2-2)^2 e^x}{(x+2)^2}dx$

$$=\int e^x dx - 4\int \frac{e^x}{x+2}dx + 4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$$

$$=\int e^x dx - 4\int \frac{1}{x+2}de^x + 4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$$

$$=e^x - 4\frac{e^x}{x+2} + 4\int e^x d\frac{1}{x+2} + 4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$$

$$=e^x - 4\frac{e^x}{x+2} - 4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx + 4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx = \frac{x-2}{x+2}e^x + C$$

解法二：$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx = \int \frac{(x+2-2)^2 e^x}{(x+2)^2}dx$

$$=\int e^x dx - 4\int \frac{e^x}{x+2}dx + 4\int \frac{e^x}{(x+2)^2}dx$$

并不一定是

反对幂指三

$$=\int e^x dx - 4\int \frac{de^x}{x+2} - 4\int e^x d\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= e^x - 4\int d\left(\frac{e^x}{x+2}\right)$$

$$\int u\,dv + \int v\,du$$

$$= \int duv = uv + C$$

$$= e^x - 4\frac{e^x}{x+2} + C = \frac{x-2}{x+2}e^x + C$$

解法三: $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

$$= \int e^x \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$= -\int e^x \cdot x^2 d\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{x-2}{x+2} e^x + C$$

并不一定是

反对幂指三

例5 求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x-\ln\left|1+\cos x\right|$$

$$\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}=x\tan\frac{x}{2}-\int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x$$

前式令 $u=\tan\frac{x}{2}$

后式配元

例6 求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

用了万能代换的思想，

但没有令 $t=\tan\frac{x}{2}$

解 原式 $=\int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}(\frac{x}{2})+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$=\int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$=x\tan\frac{x}{2}+C$

$x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\ln|1+\cos x|+C=x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\ln 2\left|\cos^2\frac{x}{2}\right|+C$

$=x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\ln 2-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$

例7 求 $\int \frac{3\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$.

$P177-Ex12$

也用此方法

解 令 $3\cos x - \sin x$

$$= A(\cos x + \sin x) + B(\cos x + \sin x)'$$

$$= (A+B)\cos x + (A-B)\sin x$$

比较同类项系数 $\begin{cases} A+B=3 \\ A-B=-1 \end{cases}$，故 $A=1,\ B=2$

令 $a\cos x + b\sin x$

$$= A(c\cos x + d\sin x) + B(c\cos x + d\sin x)'$$

说明 此技巧适用于形如 $\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x} \mathrm{d}x$ 的积分.

例8 求 $I_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$ 及 $I_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\begin{cases} aI_2+bI_1=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=x+C_1 \\ bI_2-aI_1=\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x \end{cases}$$

$\boxed{\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x)}$

$$=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_1=\frac{1}{a^2+b^2}(bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|)+C \\ I_2=\frac{1}{a^2+b^2}(ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|)+C \end{cases}$$

例9 求 $\int \max\{1,|x|\}dx.$

解 设 $f(x)=\max\{1,|x|\}$, 则 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<-1 \\ 1, & -1\le x\le 1, \\ x, & x>1 \end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续， 则必存在原函数 $F(x)$.

$F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1 \\ x+C_2, & -1\le x\le 1. \\ \frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1 \end{cases}$ 又 $F(x)$处处连续，有

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$ 即 $-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+C_2)$ 即 $\frac{1}{2}+C_3=1+C_2$,

联立并令 $C_1 = C$,

可得 $C_2 = \dfrac{1}{2} + C, \quad C_3 = 1 + C.$

故 $\displaystyle\int \max\{1, |x|\} dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \dfrac{1}{2} + C, & -1 \le x \le 1. \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$

$$-1 + C_2 = -\frac{1}{2} + C_1, \quad \frac{1}{2} + C_3 = 1 + C_2$$

例10 设 $F(x)$为$f(x)$的原函数,且 $F(0)=1$,当$x\geq 0$时有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$,$F(x)\geq 0$,求$f(x)$.

解 由题设$F'(x)=f(x)$, 则 $F(x)F'(x)=\sin^2 2x$,

故 $$\int F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int \sin^2 2x\mathrm{d}x=\int \frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$$

即 $$\frac{1}{2}F^2(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$$

$\because F(0)=1$, $\therefore C=F^2(0)=1$, 又 $F(x)\geq 0$

因此 $$F(x)=\sqrt{x-\tfrac{1}{4}\sin 4x+1}$$

故 $$f(x)=F'(x)=\frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x-\frac{1}{4}\sin 4x+1}}$$